E.N.S.I. DE CHIMIE GROUPE CENTRE (P.C.)

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

N.B. — *L'épreuve comprend deux problèmes que les candidats traiteront dans l'ordre qui leur conviendra.*

PROBLÈME I

1° Justifier l'existence du nombre $I(a) = \int_a^{3a} \frac{\cos t}{t}\, dt$ pour tout nombre a réel, non nul.

Indiquer le signe des nombres $I(\pi/6)$ et $I(\pi/2)$.

Que devient $I(a)$ par le changement de variable $t = a\theta$ $\quad (a \neq 0)$.

Comparer $I(-a)$ et $I(a)$. Montrer que l'on a

$$\forall\, a \neq 0 \quad : \quad |I(a)| \leqslant \text{Log } 3$$

Déterminer une constante k pour laquelle on a

$$\forall\, a \neq 0 \quad : \quad \text{Log } 3 - I(a) \leqslant ka^2$$

En déduire les limites $\lim_{a \to 0} I(a)$ et $\lim_{a \to 0} \frac{\text{Log } 3 - I(a)}{a}$.

2° On considère la fonction f telle que $f(0) = \text{Log } 3$ et $f(x) = I(x)$ pour tout x réel non nul. La fonction f est-elle continue pour tout x? La fonction f est-elle dérivable en $x = 0$? Calculer la dérivée f' de f pour $x \neq 0$. La fonction f' est-elle continue pour toute valeur de x?

Étudier le signe de f'. Expliciter les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est maximum et celles pour lesquelles $f(x)$ est minimum.

Quelle particularité présente le graphe de la fonction f en :

$$x = k\pi\,, \qquad k \in \mathbf{Z}\,, \qquad k \neq 0?$$

Montrer qu'il existe une constante c telle que

$$\forall x > 0 \quad : \quad \left| f(x) - \frac{\sin 3x - 3 \sin x}{x} \right| \leqslant \frac{c}{x}$$

Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

3° On pose $x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n \in \mathbf{N})$ et $I_n = f(x_n)$.

Exprimer I_n à l'aide des nombres J_k :

$$k \in \mathbf{N} \qquad J_k = \int_{\frac{\pi}{2} + k\pi}^{\frac{\pi}{2} + (k+1)\pi} \frac{\cos t}{t}\, dt$$

Montrer que $|J_{k+1}| < |J_k|$. En déduire le signe de I_n.

Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

PROBLÈME II

Dans tout ce problème a et b sont deux suites données de n nombres réels $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ et $b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, avec $n \geqslant 2$, les n nombres α_i sont distincts, ainsi que les n nombres β_i ($i \neq j$ implique $\alpha_i \neq \alpha_j$ et $\beta_i \neq \beta_j$). On notera $M = [m_{ij}]$ une matrice telle que m_{ij} est l'élément de M situé dans la i-ème ligne et la j-ème colonne.

On pose $S = [s_{ij}]$ et $P = [p_{ij}]$ avec $s_{ij} = \alpha_i + \beta_j$ et $p_{ij} = \alpha_i \beta_j$.

1° On se place d'abord dans le cas $n = 2$. Calculer les déterminants $\det S$ et $\det P$ des matrices S et P. Quels sont les rangs de S et de P?

2° On suppose $n \geqslant 3$. Calculer $\det S$ et $\det P$. Déterminer les rangs r_S et r_P de S et de P. On désigne par X la matrice colonne d'éléments x_i $(i = 1, 2, \ldots, n, \quad x_i \in \mathbf{R})$ et par A la matrice colonne d'éléments λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n, \quad \lambda_i \in \mathbf{R})$.

Écrire les conditions que doivent vérifier les nombres λ_i pour que l'on puisse résoudre le système d'équations en x_i : $SX = A$. Même question pour le système : $PX = A$.

3° Soit $A = [\alpha_{ij}]$ avec $\alpha_{ij} = (\alpha_i)^{j-1}$ (puissance $(j-1)$ième de α_i) et les conventions habituelles : $\alpha_i^0 = 1 \qquad (\alpha_i)^1 = \alpha_i$. Les indices i, j varient de 1 à n.

Le déterminant de A est un polynôme en α_i ; montrer qu'il est divisible par $\alpha_i - \alpha_j$ $(j \neq i)$. En déduire l'expression de det A. On désignera par B la matrice $B = [\beta_{ij}]$ avec $\beta_{ij} = (\beta_i)^{j-1}$.

Soit $f(x, y)$ le polynôme en x, et y à coefficients réels :

$$f(x, y) = \sum_{\substack{1 \leq p \leq n \\ 1 \leq q \leq n}} c_{pq}\, x^{p-1}\, y^{q-1}$$

La matrice $C = [c_{ij}]$ est la matrice des coefficients de f. On définit la matrice F associée à f :

$$F = [f_{ij}] \quad \text{avec} \qquad f_{ij} = f(\alpha_i, \beta_j)$$

On demande d'écrire la matrice F à l'aide des matrices A, B, C. (On notera ${}^tM$ la transposée d'une matrice M).

Montrer que la condition $\det F \neq 0$ est équivalente à $\det C \neq 0$.

Soient h et k deux nombres réels donnés, f^* le polynôme :

$$f^*(x, y) = f(x + h, y + k)$$

et soit F^* la matrice associée à f^*. Comparer $\det F^*$ et $\det F$.

4° Montrer que les matrices F et C ont même rang. Retrouver ainsi les déterminations de r_S et de r_P demandées à la question n° 2.

On choisit $n = 3$ et $f(x, y) = x + y + xy - xy(x + y)$.

Écrire la condition que doivent vérifier les nombres λ_1, λ_2, λ_3 pour que l'on puisse résoudre les équations en x_1, x_2, x_3 :

$$FX = \Lambda$$

(Les notations pour X et Λ sont celles de la question n° 2.)

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail